УДК 517.958:535.4
DOI 10.21685/2072-3040-2020-3-3

Е. В. Гусарова, Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ДИФРАКЦИОННОЙ РЕШЕТКЕ[1]

Аннотация.

Актуальность и цели. Цель исследования – разработка численного метода для решения задачи дифракции электромагнитных волн на двумерной периодической дифракционной решетке.

Материалы и методы. Применяется модифицированный метод разделения переменных в области неоднородности для решения задачи дифракции электромагнитных волн на двумерной периодической дифракционной решетке.

Результаты. Представлен модифицированный метод разделения переменных в области неоднородности для решения задачи дифракции электромагнитных волн на двумерной периодической дифракционной решетке.

Выводы. Предложенный численный метод является эффективным средством для решения задачи дифракции электромагнитных волн на двумерной периодической дифракционной решетке.

Ключевые слова: электромагнитные волны, дифракционные решетки, метод разделения переменных.

E. V. Gusarova, Yu. G. Smirnov, A. A. Tsupak

ON A METHOD FOR SOLVING THE PROBLEM OF ELECTROMAGNETIC WAVE DIFFRACTION ON A DIFFRACTION GRATING

Abstract.

Background. The aim of the study is to develop a numerical method for solving the problem of diffraction of electromagnetic waves on a two-dimensional periodic diffraction grating.

Materials and methods. A modified method of separation of variables in the region of inhomogeneity is used to solve the problem of diffraction of electromagnetic waves by a two-dimensional periodic diffraction grating.

Results. A modified method of separation of variables in the region of inhomogeneity is presented for solving the problem of diffraction of electromagnetic waves on a two-dimensional periodic diffraction grating.

Conclusions. The proposed numerical method is an effective tool for solving the problem of diffraction of electromagnetic waves on a two-dimensional periodic diffraction grating.

Keywords: electromagnetic waves, diffraction gratings, variable separation method.

---

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 18-01-00219А.

Введение

Дифракционные решетки находят разнообразное применение в электродинамике и используются уже на протяжении нескольких десятилетий. Разработаны математические численные методы для расчета электромагнитных полей и основных характеристик решеток [1–4]. Однако в связи с возросшей сложностью современных устройств возникает необходимость разработки новых эффективных численных методов расчета характеристик решеток с неравномерным расположением штрихов в периоде и большим их количеством, что приводит к задачам, требующим значительных вычислительных ресурсов для достижения высокой точности.

В статье предлагается новый метод решения задачи дифракции электромагнитной волны на периодической решетке. Метод основан на разложении решения в области неоднородности решетки по собственным функциям соответствующего дифференциального оператора, который учитывает условия сопряжения на границах по одной из переменных, а также условия квазипериодичности. Это позволяет выписать решение задачи дифракции в области неоднородности в явном виде. При этом численному определению подлежат только собственные значения этого оператора.

1. Постановка задачи дифракции волны на решетке

Рассматривается задача дифракции плоской электромагнитной монохроматической Е-поляризованной волны на бесконечной двумерной периодической диэлектрической решетке с неравномерным распределением штрихов в периоде.

Образующие цилиндрической поверхности решетки параллельны оси $0y$ декартовой системы координат $0xyz$. В качестве падающей волны рассматривается плоская Е-поляризованная волна единичной амплитуды.

Из системы уравнений Максвелла и из условий сопряжения на поверхности решетки следуют уравнения, связывающие неизвестные коэффициенты в разложениях по собственным функциям дифференциального оператора в области неоднородности.

Отыскание этих коэффициентов позволяет определить вид электромагнитного поля в области решения задачи. Кроме того, через полученное решение можно определить все другие характеристики дифракционной решетки, имеющие практическое значение.

Будем рассматривать задачу дифракции Е-поляризованной плоской электромагнитной волны на диэлектрической периодической решетке, расположенной на диэлектрической подложке.

В качестве падающей на решетку волны рассмотрим плоскую волну единичной амплитуды

$$u_0(x,y) = \exp(ik_0 x \sin\varphi - ik_0 y \cos\varphi), \tag{1}$$

где φ – угол падения, отсчитываемый в плоскости Oxy от оси Oy против часовой стрелки.

Требуется определить полное поле, возникающее над идеально проводящей поверхностью решетки.

В случае E-поляризации все составляющие электромагнитного поля выражаются через одну компоненту поля E_z, которая будет обозначаться через $u(x,y)$. Эта функция должна удовлетворять:

– уравнению Гельмгольца $\left(\Delta + k_0^2\right)u = 0$ всюду вне контура решетки;

– условиям излучения на бесконечности;
– условиям сопряжения на поверхности решетки;
– условию квазипериодичности Флоке;
– условию конечности энергии в любой ограниченной области.

Постановка задачи дифракции на периодической решетке является традиционной, имеется в [1, 2], и мы не будем ее здесь повторять.

Рассмотрим решетки, профиль которых представляет собой ломаную линию, состоящую из отрезков, параллельных осям Ox, Oy. В направлении оси Ox решетка является периодической с периодом $T > 0$.

Неограниченную двумерную область $V = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$ решения задачи представим объединением трех открытых подобластей:

$V_0 = \left\{(x,y) \in V : y > h > 0\right\}$ (здесь и далее h – высота профиля решетки),

$$V_1 = \left\{(x,y) \in V : 0 < y < h\right\} \text{ и } V_2 = \left\{(x,y) \in V : y < 0\right\},$$

и двух прямых:

$$S_h = \left\{(x,y) : y = h\right\} \text{ и } S_0 = \left\{(x,y) : y = 0\right\}.$$

Области V_0 и V_1 однородны и характеризуются заданными волновыми числами k_0 и k_1 соответственно. В области V_1 выделим подобласть V_T точек с абсциссой $x \in [0,T]$ и представим ее в виде

$$\bar{V}_T = \bigcup_i \overline{\prod_i}, \ \prod_i = (a_i, a_{i+1}) \times (0,h), \ i = 0,\ldots,N-1,$$

здесь $a_0 = 0$, $a_N = a = T$.

В прямоугольниках $\prod_i$ значения волнового числа равны κ_i и, вообще говоря, различны. Величина шага в решетке $a_{i+1} - a_i$ непостоянна, т.е. рассматриваются неравномерные решетки.

2. Модифицированный метод разделения переменных для решения задачи

Представим полное поле $u(x,y)$ в неограниченных областях в виде рядов:

$$u(x,y) = u_0(x,y) + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} r_l \exp\left\{i(2\pi l / T)x + i\gamma_l^{(1)}(y-h)\right\}, \ y > h, \tag{2}$$

$$u(x,y) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} t_l \exp\left\{i(2\pi l / T)x - i\gamma_l^{(2)} y\right\}, \ y < 0. \tag{3}$$

Здесь

$$\gamma_l^{(j)} = \left(k_j^2 - \left(2\pi l / T\right)^2\right)^{1/2}, \quad j = 0{,}1, \ \operatorname{Re}\gamma_l^{(j)} \geq 0, \ \operatorname{Im}\gamma_l^{(j)} \geq 0, \tag{4}$$

r_l и t_l – амплитудные коэффициенты отражения и прохождения l-х мод.

Опишем модифицированный метод разделения переменных, предлагаемый для решения задачи. Решение задачи в прямоугольниках $\prod_i$ будем искать в виде рядов вида

$$u(x, y) = \sum_{l=0}^{+\infty} X_l(x) Y_l(y), \tag{5}$$

учитывая, что $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца в каждом прямоугольнике, а также условиям сопряжения на сторонах прямоугольников $x = a_i$ и условию квазипериодичности.

Применяя метод разделения переменных, получим, что функция Y_l имеет вид

$$Y_l(y) = b_l^{(1)} \exp\left(i\sqrt{\lambda_l}\, y\right) + b_l^{(2)} \exp\left(-i\sqrt{\lambda_l}\,(y - h)\right). \tag{6}$$

Функции $X_l(x)$ являются решениями следующих задач на собственные значения:

$$\frac{X_l''}{X_l} + \kappa^2(x) = \lambda_l, \quad \kappa^2(x) = \kappa_i^2, x \in (a_i, a_{i+1}); \tag{7}$$

$$X_l(0) = AX_l(a), \ X_l'(0) = AX_l'(a); \quad [X_l] = [X_l'] = 0.$$

Здесь A – константа, входящая в условие квазипериодичности.

Введем обозначение: $\gamma_i = \sqrt{\kappa_i^2 - \lambda_l}$. Из формул (7) получаем:

$$X_l'' + (\kappa^2(x) - \lambda_l) X_l = 0, \tag{8}$$

$$X_l(x) = c_i \sin\gamma_i(x - a_i) + d_i \cos\gamma_i(x - a_i), \quad x \in (a_i, a_{i+1}),$$

$$X_l(x) = c_{i+1} \sin\gamma_{i+1}(x - a_{i+1}) + d_{i+1} \cos\gamma_{i+1}(x - a_{i+1}), \ x \in (a_{i+1}, a_{i+2}). \tag{9}$$

Из условий сопряжения во внутренних узлах a_i получаем систему из $(2N - 2)$ уравнений

$$c_i \sin\gamma_i(a_{i+1} - a_i) + d_i \cos\gamma_i(a_{i+1} - a_i) = d_{i+1},$$

$$c_i \sin\gamma_i(a_{i+1} - a_i) - d_i \sin\gamma_i(a_{i+1} - a_i) = c_{i+1}\frac{\gamma_{i+1}}{\gamma_i}, \quad 0 \leq i \leq N - 2, \tag{10}$$

а из условий квазипериодичности получим еще два уравнения:

$$d_0 = Ac_N \sin\gamma_N\left(a_N - a_{N-1}\right) + Ad_N \cos\gamma_N\left(a_N - a_{N-1}\right),$$

$$c_0\gamma_0 = A\gamma_N\left(c_N \cos\gamma_N\left(a_N - a_{N-1}\right) - d_N \sin\gamma_N\left(a_N - a_{N-1}\right)\right). \qquad (11)$$

Таким образом, получена однородная система $2N$ уравнений для нахождения $2N$ неизвестных. Эта система имеет нетривиальное решение, если определитель матрицы системы равен нулю.

Задачу об отыскании собственных чисел λ_l задачи можно свести к проблеме вычисления некоторого определителя второго порядка.

Записывая уравнения (10), (11) в матричной форме

$$\left(c_{i+1}, d_{i+1}\right)^T = S_i\left(c_i, d_i\right)^T \quad \left(0 \le i \le N-2\right),$$

$$\left(c_0, d_0\right)^T = Q\left(c_N, d_N\right)^T, \qquad (12)$$

сведем исходную систему линейных алгебраических уравнений к системе двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\left(c_0, d_0\right)^T = QS_{N-2}\ldots S_0\left(c_0, d_0\right)^T, \qquad (13)$$

откуда получим требуемое уравнение:

$$\det\left(I - QS_{N-2}\ldots S_0\right) = 0. \qquad (14)$$

В качестве $\left(c_0, d_0\right)^T$ можно взять любое нетривиальное решение системы (13) при $\lambda = \lambda_l$.

Определив собственные значения λ_l и собственные функции задачи (7), получим из (5) представление решения $u\left(x, y\right)$ в конечной области V_T:

$$u\left(x, y\right) = \sum_{l=0}^{+\infty} X_l\left(x\right) Y_l\left(y\right) \qquad (15)$$

с неизвестными коэффициентами $b_l^{(1)}, b_l^{(2)}$.

Заметим, что за счет выбора функций в (2), (3) и выполнения условий (11) условия квазипериодичности автоматически выполняются.

Далее, коэффициенты r_l, t_l и $b_l^{(1)}, b_l^{(2)}$ находятся из условий сопряжения при $y = 0$ и $y = h$:

$$\sum_{l=0}^{+\infty} X_l\left(x\right) Y_l\left(h\right) = u_0\left(x, h\right) + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} r_l \exp\left\{i\left(2\pi l / T\right)x\right\}, \qquad (16)$$

$$\sum_{l=0}^{+\infty} X_l\left(x\right) Y_l{}'\left(h\right) = u_0'\left(x, h\right) + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} r_l i\gamma_l^{(1)} \exp\left\{i\left(2\pi l / T\right)x\right\}, \qquad (17)$$

$$\sum_{l=0}^{+\infty} X_l\left(x\right) Y_l\left(0\right) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} t_l \exp\left\{i\left(2\pi l / T\right)x\right\}, \qquad (18)$$

$$\sum_{l=0}^{+\infty} X_l(x) Y_l'(0) = -\sum_{l=-\infty}^{+\infty} t_l i\gamma_l^{(2)} \exp\{i(2\pi l / T)x\}, \qquad (19)$$

где в $u_0'(x,h)$ производная берется по y в точке h.

Заметим, что выражения справа в формулах (16)–(19) – это ряды Фурье функции на отрезке [0, T]. Умножая (16)–(19) на соответствующие экспоненты и интегрируя выражения от 0 до T, получаем два уравнения относительно $b_l^{(1)}, b_l^{(2)}$:

$$i\gamma_l^{(1)} \int_0^T \exp\left\{-i\left(\frac{2\pi l}{T}\right)x\right\}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} X_p(x) Y_p(h) - u_0(x,h)\right)dx =$$

$$= \int_0^T \exp\left\{-i\left(\frac{2\pi l}{T}\right)x\right\}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} X_p(x) Y_p'(h) - u_0'(x,h)\right)dx; \qquad (20)$$

$$-i\gamma_l^{(2)} \int_0^T \exp\left\{-i\left(\frac{2\pi l}{T}\right)x\right\}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} X_p(x) Y_p(0)\right)dx =$$

$$= \int_0^T \exp\left\{-i\left(\frac{2\pi l}{T}\right)x\right\}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} X_p(x) Y_p'(0)\right)dx \qquad (21)$$

для всех целых l.

3. Численный метод решения задачи

Для численного решения задачи следует взять

$$u(x,y) = \sum_{l=0}^{M} X_l(x) Y_l(y) \qquad (22)$$

для некоторого M. Тогда имеем $(2M+2)$ коэффициентов $b_l^{(1)}, b_l^{(2)}$. Выберем M четным числом. В уравнениях (20), (21) возьмем $(M+1)$ значений $l = -M/2, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, M/2$.

В результате получается система линейных алгебраических уравнений порядка $(2M+2)$:

$$i\gamma_l^{(1)} \int_0^T \exp\left\{-i\left(\frac{2\pi l}{T}\right)x\right\}\left(\sum_{p=0}^{M} X_p(x) Y_p(h) - u_0(x,h)\right)dx =$$

$$= \int_0^T \exp\left\{-i\left(\frac{2\pi l}{T}\right)x\right\}\left(\sum_{p=0}^{M} X_p(x) Y_p'(h) - u_0'(x,h)\right)dx, \qquad (23)$$

$$-i\gamma_l^{(2)}\int_0^T \exp\left\{-i\left(\frac{2\pi l}{T}\right)x\right\}\left(\sum_{p=0}^{M} X_p(x)Y_p(0)\right)dx =$$

$$=\int_0^T \exp\left\{-i\left(\frac{2\pi l}{T}\right)x\right\}e\left(\sum_{p=0}^{M} X_p(x)Y_p'(0)\right)dx, \qquad (24)$$

где $l=-M/2,\ldots,-1,0,1,\ldots,M/2$.

Все интегралы в системе (23), (24) вычисляются численно с помощью какой-либо квадратурной формулы. Также численно определяются собственные значения λ_l.

Заключение

В статье предложен новый метод решения задачи дифракции электромагнитной волны на периодической решетке. Метод основан на разложении решения в области неоднородности решетки по собственным функциям соответствующего дифференциального оператора, который учитывает условия сопряжения на границах по одной из переменных, а также условия квазипериодичности. Это позволяет выписать решение задачи дифракции в области неоднородности в явном виде. Для численного определения собственных значений этого оператора получено уравнение, которое может быть решено любым из методов поиска вещественных корней на отрезке.

Библиографический список

1. **Шестопалов, В. П.** Резонансное рассеяние волн. Т. 1. Дифракционные решетки / В. П. Шестопалов, А. А. Кириленко, С. А. Масалов, Ю. К. Сиренко. – Киев : Наукова думка, 1986. – 232 с.
2. **Шестопалов, В. П.** Динамическая теория решеток / В. П. Шестопалов, Ю. К. Сиренко. – Киев : Наукова думка, 1989. –216 с.
3. **Popov, E.** Gratings: Theory and Numeric Applications / E. Popov. – Second Revisited Edition. – Institut Fresnel, AMU, CNRS, ECM, 2014. – 59 p.
4. Design of broadband polarization-independent multilayer dielectric grating / Chen Junming et al. // Proc. of SPIE. – 2017. – Vol. 10339. – P. 1033–911.

References

1. Shestopalov V. P., Kirilenko A. A., Masalov S. A., Sirenko Yu. K. *Rezonansnoe rasseyanie voln. T. 1. Difraktsionnye reshetki* [Resonant scattering of waves. Volume 1. Diffraction gratings]. Kiev: Naukova dumka, 1986, 232 p. [In Russian]
2. Shestopalov V. P., Sirenko Yu. K. *Dinamicheskaya teoriya reshetok* [Dynamic lattice theory]. Kiev: Naukova dumka, 1989, 216 p. [In Russian]
3. Popov E. *Gratings: Theory and Numeric Applications*. Second Revisited Edition. Institut Fresnel, AMU, CNRS, ECM, 2014, 59 p.
4. Junming Chen et al. *Proc. of SPIE*. 2017, vol. 10339, pp. 1033–911.

Гусарова Елена Васильевна
аспирант, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

Gusarova Elena Vasil'evna
Postgraduate student, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

E-mail: gusarova.gu@yandex.ru

Смирнов Юрий Геннадьевич
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математики и суперкомпьютерного моделирования, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Smirnov Yuriy Gennad'evich
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the sub-department of mathematics and supercomputer modeling, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Цупак Алексей Александрович
кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математики и суперкомпьютерного моделирования, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: altsupak@yandex.ru

Tsupak Aleksey Aleksandrovich
Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, sub-department of mathematics and supercomputer modeling, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Образец цитирования:

Гусарова, Е. В. Об одном методе решения задачи дифракции электромагнитной волны на дифракционной решетке / Е. В. Гусарова, Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2020. – № 3 (55). – С. 31–38. –DOI 10.21685/2072-3040-2020-3-3.